Απειροστικός Λογισμός III   No. 1   Date 04/11/2019

Παρατήρηση 1.35

$U \subset \bar{U}$, $\bar{U}$ κλειστό, $U \subset K \subset \mathbb{R}^n$, K κλειστό $\Rightarrow \bar{U} \subset K$

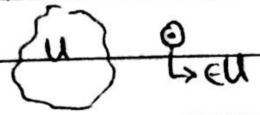
η κλειστή θήκη είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το U.

Επίσης: U κλειστό $\Leftrightarrow U = \bar{U}$

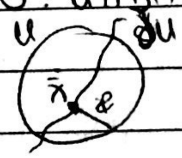
ΝΕΟ!

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται

(α) μεμονωμένο σημείο του $U \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ $U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) = \{\bar{x}\}$



(β) σημείο συσσώρευσης του $U \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$



(γ) σημείο επαφής του U

$\Leftrightarrow$ αν $\bar{x} \in U$ ή $\bar{x}$ σημ. συσσώρευσης του U

- σύνολο σημείων συσσώρευσης του U: = παράγωγο σύνολο U'
- Το σύνολο των σημείων επαφής $= U \cup U'$

Παρατήρηση 1.39

(α) $\bar{x}$ με σημείο του $U \Rightarrow \bar{x} \in U \cap \partial U$

(β) $\bar{x} \in U \Rightarrow \bar{x}$ ή μεμονωμένο σημείο του U

ή σημείο συσσώρευσης του U.

(γ) $\text{int}\, U \subset U'$ [$\Leftrightarrow$ κάθε εσωτερικό σημείο ενός U είναι σημείο συσσώρευσης του U]

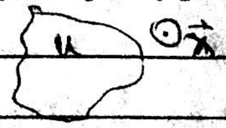
[$\exists \varepsilon_0 > 0$ $B(\bar{x}, \varepsilon_0) \subset U$

Έστω $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Τότε $\exists (\bar{x}, \varepsilon) \subset B(\bar{x}, \varepsilon_0) \subset U$

$\Rightarrow \emptyset \neq B(x, \varepsilon) \setminus \{\varepsilon\} \subset U \Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U \neq 0$

Αν $\varepsilon > \varepsilon_0$, τότε $\exists \varepsilon' < \varepsilon_0$ με $\underbrace{B(\bar{x}, \varepsilon') \setminus \{\bar{x}\}}_{\subset B(\bar{x}, \varepsilon) / \{\bar{x}\}} \cap U \neq \emptyset$

(δ) $\mathrm{ext}\, U$ (στα απαραίτητα εξωτερικό) $\subset \mathbb{R}^n \setminus U'$
[ένα εξωτερικό σημείο του U δεν μπορεί να 'ναι σ.σ. του U]



Απόδειξη:
Αφού $\mathrm{ext}\, U \overset{\text{ορ}}{=} \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$:

$\vec{x} \in \mathrm{ext}\, U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\vec{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{B(x,\varepsilon)}_{\supseteq B(\vec{x},\varepsilon) \setminus \{\vec{x}\}} \cap U = \emptyset \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \setminus \{\vec{x}\} \cap U = \emptyset$

Άσκηση:
Δείξτε τα (α), (β) και εξετάστε αν ισχύει το αντίθετο (αν δεν ισχύει : αντιπαραδείγματα)

Πρόταση 1.36
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε $\bar{U} = U \cup U'$

Πόρισμα 1.31
$U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow U' \subset U$ [Άσκηση. βλ. σημ.]

Πρόταση 1.37
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε $\boxed{\bar{U} = \mathrm{int}\, U \cup \mathrm{bd}\, U}$ $\boxed{\text{SOS}}$

Παρατήρηση:
Αφού $\mathrm{int}\, B(\bar{x},\varepsilon) = B(\bar{x},\varepsilon)$ και $\mathrm{bd}\, B(\vec{x},\varepsilon) = \partial B(\vec{x},\varepsilon)$ παράδειγμα για άσκηση σπίτι.

$B(\bar{x},\varepsilon) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon\}$ $\qquad \partial B(\vec{x},\varepsilon) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| = \varepsilon\}$

από την πρόταση 1.37 έχουμε $\overline{B(x,\varepsilon)} = \bar{B}(\bar{x},\varepsilon)$
$:= \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{y}\| \leq \varepsilon\}$

Συμβολισμός: Χρησιμοποιείται συχνά και ο συμβολισμός $\mathrm{int}\, U = U$ και $\mathrm{bd}\, U = \partial U$.

Απόδειξη Πρ. 1.3.6

$\supset$ Αφού γνωρίζαμε ότι $U \subset \bar{U}$, πρέπει και αρκεί να δείξαμε ότι $U' \subset \bar{U}$ ή ισοδύναμα ότι $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$.

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$. Αφού $\bar{U}$ κλειστό, $\exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$
$\subset \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset \Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U = \emptyset$
που σημαίνει ότι το $\bar{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης ☑

$\subset$: Πρέπει και αρκεί να δείξω ότι $\mathbb{R}^n \setminus (U \cup U') \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} = (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U')$

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$ δεν είναι σ.σ., τότε $\exists \varepsilon > 0$

$B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U = \emptyset \xRightarrow[x \notin U]{} B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset \Rightarrow U \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon)$.

$\Rightarrow \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon) \Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$ ☑

Απόδειξη Προτάσεως 1.3.7

Γνωρίζαμε ότι $\mathbb{R}^n = \mathrm{ext}\,U \cup \mathrm{int}\,U \cup \mathrm{bd}\,U$ (ξένα μεταξύ τους). Άρα πρέπει και αρκεί ν.δ.ο.
$\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} = \mathrm{ext}\,U$

Αφού $\bar{U}$ κλειστό και $U \subset \bar{U}$ έχουμε $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} = \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{U})$

$\underset{\text{Προτ. 1.3.4(δ)}}{\subset} \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) \underset{\text{ορισμός}}{=} \mathrm{ext}\,U$

Από τον ορισμό, $\forall \bar{x} \in \mathrm{ext}\,U : \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow$

$\underbrace{\bar{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U')}$

$= \mathbb{R}^n \setminus (U \cup U') \overset{\text{Προτ. 1.5.6}}{=} \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$

$\Rightarrow \mathrm{ext}\,U \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$ [$\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U'$, επειδή (βλ. παρατ. 1.3.9(δ)) $\mathrm{ext}\,U \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$].